FACULTEIT ECONOMIE
EN BEDRIJFSKUNDE

Wiskunde II(B)

Prof. dr. Vanmaele

Bachelor Toegepaste Economische Wetenschappen:
Handelsingenieur
Academiejaar 2019–2020

UNIVERSITEIT
GENT

Wiskunde IIB

voor het tweede jaar Bachelor in de
Toegepaste Economische Wetenschappen: Handelsingenieur

2019 – 2020

UNIVERSITEIT GENT

Prof. dr. Michèle Vanmaele
Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek
Faculteit Wetenschappen
Krijgslaan 281 (S9), 9000 Gent
E-mail: michele.vanmaele@ugent.be

Voorwoord

> *...I have been fortunate in my association with many gifted students, who taught me in many ways the truth that mathematics is a language and a very universal language. Though imperfect in many ways it still provides an excellent tool for communicating economic ideas. It cannot generate economic intuition, but it can supplement and activate it. Modern economics has increasingly used mathematical concepts and methods. Tools of applied maths therefore become all the more important today to a modern student of economics ...*

J.K. SENGUPTA in Applied Mathematics for Economics

Wiskunde is de taal geworden van de moderne analytische economie. Ze laat toe verbanden tussen economische grootheden en economische actoren onderling te kwantificeren.
Basiscursussen economie hebben slechts eenvoudige wiskundige technieken nodig, die uitvoerig zijn bestudeerd in Wiskunde I, om de beschouwde economische modellen te beschrijven en te analyseren. Dergelijke modellen zijn beperkt tot één of twee goederen in een wereld van vrije concurrentie, volledige informatie en geen onzekerheden. Cursussen micro- en macro-economie die dit basisniveau overstijgen, laten veel van deze vereenvoudigde onderstellingen vallen. Deze cursus Wiskunde II legt de nadruk op het hanteren van wiskundige begrippen en methoden in economische wetenschappen, en verschaft de nodige wiskundige achtergrondkennis om meer gesofistikeerde, meer realistische economische modellen te bestuderen. We zullen slechts een fractie zien van alle technieken die eventueel kunnen voorkomen als we ook denken aan cursussen econometrie, wiskundige economie, speltheorie, marktonderzoek, enz. Wel wordt de basis gelegd waarop gemakkelijk verder kan gebouwd worden om, indien nodig, ontbrekende wiskundige concepten te verwerven. In die zin wil deze cursus Wiskunde II ook een naslagwerk zijn en bevat een referentielijst met de voornaamste wiskundige basiswerken voor economisten.

De inhoud van Wiskunde IIB bouwt voort op de cursussen Wiskunde I en Wiskunde IIA. De aanpak van de cursus is zoals in de referentiewerken van Simon & Blume en van Chiang die internationaal de standaardwerken zijn voor cursussen wiskunde in een universitaire opleiding economische en toegepaste economische wetenschappen:

- Het is niet de bedoeling de wiskundige technieken aan te bieden als kookboekrecepten maar wel om aandacht te besteden aan de wiskundige ideeën en intuïtie ondersteund door grafische interpretaties.
- Wiskundige technieken worden niet aangebracht met en beperkt tot één specifiek voorbeeld, maar worden veralgemeend en de toepasbaarheid op andere gevallen wordt geïllustreerd. Het inoefenen van de aangeleerde methode gebeurt aan de hand van de oefeningen in de bijhorende oefeningencursus.

- Aangezien wiskunde door jullie zal aangewend worden om beter inzicht te verwerven in economische structuren, wordt er stilgestaan bij de economische motivatie van de aangebrachte wiskundige concepten en worden er economische toepassingen besproken. Daarnaast komen onderwerpen zoals vectorrekening, complexe getallen, Laplacetransformaties en dubbelintegralen aan bod ter ondersteuning van de andere wetenschappelijke en technische vakken.

- Een bewijsvoering moet jullie leren nagaan of een besluit al dan niet kan genomen worden op basis van de gegeven onderstellingen via een gevoerde argumentatie.

Wat van jullie verwacht wordt, situeert zich op drie niveaus: *kennen*, *kunnen* en *toepassen*.

- Definities moeten jullie kennen. Om wiskundige begrippen op een correcte manier te hanteren moeten jullie weten wat deze begrippen betekenen. Waar toepasselijk kan een grafische weergave het kennen helpen bevorderen.

- Stellingen, formules, gevolgen, eigenschappen moeten jullie kennen en begrijpen (= kunnen), de achterliggende ideeën kunnen weergeven, begrijpen waarom bepaalde voorwaarden noodzakelijk zijn. Ook hier is een grafische interpretatie, waar toepasselijk, belangrijk evenals voorbeelden of tegenvoorbeelden en economische toepassingen.

- De resultaten uit stellingen, eigenschappen evenals methoden en formules moeten jullie kunnen gebruiken en toepassen.

- Het onderscheid kunnen maken tussen definities en praktische werkwijzen die aangereikt worden in eigenschappen en stellingen.

- Bewijzen, redeneringen en berekeningen moeten jullie kunnen opbouwen. Hierbij is het heel belangrijk dat alle overgangen kunnen verklaard worden en dat jullie inzien op welke manier de gevoerde argumentatie steunt op de gemaakte onderstellingen.

- Ook belangrijk is de samenhang en het inzicht hoe een resultaat voortbouwt op een vorig.

Daarnaast wordt van jullie verwacht op een zinvolle en correcte manier een volledig antwoord op een vraag te formuleren. Dat kan zowel in woorden zijn als in formulevorm.

Niet alle bewijzen die in de cursus opgenomen zijn, zullen behandeld worden in de les. Een aantal zullen geselecteerd worden ofwel omdat het bewijs extra informatie levert over het resultaat van de stelling, ofwel omdat het een specifieke bewijsredenering betreft, ofwel om de logica achter de wiskundige techniek te zien. Van enkele bewijzen wordt verwacht dat jullie de redenering zelf kunnen opbouwen.

De slides die in de hoorcolleges zullen gebruikt worden, zullen voor jullie beschikbaar gesteld worden op UFORA en dienen als een leidraad voor de lessen en als een samenvatting van de leerstof.
Het toepassen van de technieken wordt ingeoefend in de oefeningenlessen onder begeleiding van assistenten. De rekenmachine wordt hierbij een belangrijk instrument en wordt ook toegelaten op het examen.
Voor de praktische begeleiding moeten jullie zich wenden tot de assistenten of tot mezelf. Daarnaast staat ook het discussieforum ter beschikking op UFORA.

De examenvorm is schriftelijk voor zowel de theorie als de oefeningen, en zal verder toegelicht worden tijdens de lessen. De drie aspecten “kennen, kunnen en toepassen” worden op het examen getest. De oefeningencursus is een collectie van examenvragen van voorgaande jaren en is in die zin representatief voor het oefeningenexamen. Daarnaast is extra informatie en zijn voorbeeldexamenvragen te vinden op UFORA.

Ten slotte nog iets in verband met de gebruikte notaties in de cursus:

- Nieuwe begrippen zijn cursief of in het vet gezet.
- Matrices en vectoren staan in het vet om ze duidelijk te onderscheiden van reële getallen.
- Paragrafen voorafgegaan door het symbool $\diamond$ maken geen deel uit van de leerstof.
- Er wordt gebruik gemaakt van letters uit het Griekse alfabet:

α		alfa	ι		jota	σ	Σ	sigma
β		bèta	κ		kappa	τ		tau
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	υ	Υ	upsilon
δ	Δ	delta	μ		mu	ϕ, φ	Φ	phi
ϵ, ε		epsilon	ν		nu	χ		chi
ζ		zèta	ξ	Ξ	ksi	ψ	Ψ	psi
η		èta	π	Π	pi	ω	Ω	omega
θ, ϑ	Θ	thèta	ρ		rho			

Ik wil dit voorwoord afsluiten met een dankwoord aan alle personen die bijgedragen hebben aan het opstellen of typen van deze cursustekst. Daarnaast wil ik ook iedereen bedanken die errata in voorgaande versies hebben gemeld.
Ik ben me er van bewust dat deze versie nog niet helemaal foutvrij is en reken op de kritische en aandachtige lezers voor commentaren, suggesties en correcties.

Gent, 15 januari 2020
Michèle Vanmaele

Inhoudsopgave

Lijst van figuren

Hoofdstuk 3

Dynamische analyse: differentiaalvergelijkingen.

In Wiskunde I werden exponentiële functies ingevoerd en bestudeerd omdat ze van belang zijn voor het modelleren van exponentiële groei zoals logistieke groei, groei van populatie, groei van rijkdom of van een kapitaal in een continu samengesteld intreststelsel. Bijvoorbeeld is een bedrag A op een begintijdstip 0 na een tijd t aangegroeid tot het bedrag $V(t) = Ae^{rt}$ in een continu samengesteld intreststelsel met intrestvoet r. De functie V voldoet aan

$$\frac{dV}{dt} = rV \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} - rV = 0.$$

Dit is een eerste-orde differentiaalvergelijking die lineair en homogeen is. Ze modelleert in feite de groeisnelheid van V, namelijk

$$\text{groeisnelheid van } V = \frac{dV/dt}{V} = r.$$

In dit hoofdstuk zullen economische problemen modelleren aan de hand van differentiaalvergelijkingen waarbij de tijdsveranderlijke continu is. De differenties uit hoofdstuk 4 van Wiskunde IIA moeten plaats ruimen voor afgeleiden.

3.1 Algemene begrippen

Een *(gewone) differentiaalvergelijking* is een vergelijking waarin naast de onafhankelijke veranderlijke (bijvoorbeeld genoteerd als x) eveneens een onbekende functie f (van x) en haar afgeleide functies $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ (naar x) voorkomen. Gewoonlijk schrijft men y i.p.v. f zodat een vergelijking ontstaat van de vorm:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Hierin kunnen één of meerdere van de letters $x, y, \ldots, y^{(n-1)}$ in de vergelijking ontbreken.
Treedt $y^{(n)}$ op en echter geen afgeleide van hogere orde dan spreekt men van een *differentiaalvergelijking van de n^e-orde*. Deze is lineair als de differentiaalvergelijking geschreven is als een

veelterm van de eerste graad in $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Dus een *lineaire differentiaalvergelijking van de n^e-orde* is van de gedaante:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + a_{n+1}(x) = 0,$$

waarbij $a_i(x), i = 0, \ldots, n+1$, functies van x zijn. Is $a_{n+1}(x)$ de nulfunctie, dan heet de lineaire differentiaalvergelijking *homogeen* of *gereduceerd*. In wat volgt zullen we eerder van gereduceerd spreken omdat homogene differentiaalvergelijkingen nog in een andere betekenis zullen voorkomen, zie verder §3.3.4.

Op analoge wijze kunnen *partiële differentiaalvergelijkingen* ingevoerd worden als vergelijkingen waarin naast de onafhankelijke veranderlijken $(x_1, \ldots, x_k)$ eveneens een onbekende functie f (van $x_1, \ldots, x_k$) en haar partiële afgeleide functies tot en met de n^e-orde voorkomen. We zullen ons in deze cursus beperken tot het aangeven van technieken om een aantal eenvoudige types van gewone differentiaalvergelijkingen op te lossen.

Voorbeelden 3.1.1 De volgende differentiaalvergelijkingen zijn

1. $y' - 2x = 0$: eerste orde, lineair, niet-gereduceerd;
2. $(y')^2 - xy - k^2 = 0$: eerste orde, niet-lineair;
3. $x^2yy'' + (xy' - y)^2 = 0$: tweede orde, niet-lineair;
4. $xy'' - 2y' + x^2y = 0$: tweede orde, lineair, gereduceerd.

3.2 Oplossing van een differentiaalvergelijking

Het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n^e-orde bestaat erin alle functies $f : x \mapsto f(x)$ op te sporen die in een interval $]a, b[$ continu en minstens n-maal afleidbaar zijn en waarvoor de identiteit geldt:

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$$

voor alle $x \in]a, b[$.
Men noemt f *een algemene oplossing* van een differentiaalvergelijking van de n^e-orde als f naast x nog afhangt van n onafhankelijke arbitraire constanten, m.a.w. een algemene oplossing van een differentiaalvergelijking is een familie oplossingen van de differentiaalvergelijking die evenveel arbitraire constanten of parameters bevat als de orde van de differentiaalvergelijking. Geeft men aan deze constanten bepaalde numerieke waarden, dan verkrijgt men een *particuliere oplossing* van de differentiaalvergelijking, m.a.w. een particuliere oplossing van een differentiaalvergelijking is één oplossing van de differentiaalvergelijking, zonder parameters of arbitraire constanten, of ook één exemplaar uit de algemene oplossing. De algemene oplossing is dus de unie van alle particuliere oplossingen.
Volledigheidshalve vermelden we nog dat sommige differentiaalvergelijkingen nog *singuliere oplossingen* bezitten. Dit zijn oplossingen die niet als particuliere oplossingen uit de algemene oplossing kunnen afgeleid worden, maar niettemin echte oplossingen zijn.
Legt men n *beginvoorwaarden* op dan kunnen de n arbitraire constanten bepaald worden. De algemene oplossing wordt herleid tot een unieke oplossing van de differentiaalvergelijking onder de gegeven beginvoorwaarden.

This page is intentionally left blank.

evenwichten, zie faselijn C in figuur 3.5.
Om de dynamische stabiliteit van het evenwicht te onderzoeken, gaan we na of de pijlen op de faselijn steeds leiden naar de evenwichtspositie ongeacht waar men begint op de faselijn. Als dat zo is dan is het evenwicht stabiel, zo niet dan is het evenwicht onstabiel.

We zullen hierop verder ingaan bij de studie van het convergentiegedrag van de oplossingenpaden van lineaire eerste-orde differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

3.3.1.3 Aantal oplossingen

Voor wat het "aantal" oplossingen van $y' = F(x, y)$ betreft, kan men de volgende stelling aantonen:

Stelling 3.3.1 (Existentie en uniciteit) *Onderstel dat*

- F *als functie van* (x, y) *gedefinieerd is in een open gebied* V *van* $\mathbb{R}^2$*,*
- F *en* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *continue functies zijn in* V*,*

dan bestaat er voor elk punt $(x_0, y_0) \in V$ *een unieke oplossing* f *waarvan* (x_0, y_0) *een koppel is, of m.a.w. waarvoor* $f(x_0) = y_0$.

De eis dat een gegeven koppel $(x_0, y_0) \in V$ een element van de gezochte oplossing f van de differentiaalvergelijking moet zijn, noemt men een *begin-* of *randvoorwaarde* voor de gezochte oplossing. De bovenstaande stelling verzekert dus dat — onder de vermelde voorwaarden — de differentiaalvergelijking precies één oplossing met $(x_0, y_0) \in V$ als beginvoorwaarde bezit.

In de volgende paragrafen bekijken we een zestal oplossingsmethoden voor differentiaalvergelijkingen van eerste orde, die volstaan voor het oplossen van de meeste problemen die hun oorsprong vinden in de economie.

3.3.2 De onbekende functie ontbreekt

Als de onbekende functie niet optreedt, vereenvoudigt de eerste-orde differentiaalvergelijking tot

$$y' = F(x).$$

Bij definitie van primitieve functie (zie Wiskunde I) is elke oplossing f van deze differentiaalvergelijking een primitieve functie van F.
Is F gedefinieerd en continu in een open interval $]\alpha, \beta[$ dan is f van de gedaante

$$f : x \mapsto \int_c^x F(t)dt$$

met $c \in [\alpha, \beta]$ en $x \in]\alpha, \beta[$. Omgekeerd is elke functie van de gegeven gedaante een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Praktisch integreren we beide leden van de differentiaalvergelijking naar x. Dit levert als algemene oplossing

$$y = \int F(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De constante C kan bepaald worden als een beginvoorwaarde (x_0, y_0) gegeven is.

Voorbeelden 3.3.1

1. $y' = \cos x \sin x$ heeft als algemene oplossing

$$\begin{aligned} y &= \int \cos x \sin x \, dx + C \\ &= \int \sin x \, d \sin x + C \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $y' = e^{x^2}$ heeft als algemene oplossing

$$y = \int e^{x^2} dx + C.$$

Deze integraal is niet berekenbaar met de in Wiskunde I geziene integratiemethoden.

3.3.3 Scheiding der veranderlijken

Als de veranderlijke x en de onbekende functie kunnen gescheiden worden, kan de differentiaalvergelijking in de volgende gedaante geschreven worden:

$$y' = \frac{M(x)}{N(y)}, \tag{3.2}$$

en we spreken van een *scheidbare differentiaalvergelijking*[1]. We kunnen de vergelijking (3.2) ook omvormen tot een zogenaamde differentiaalvorm door gebruik te maken van de gelijkheid $y'(x) = \frac{dy}{dx}$:

$$N(y)dy = M(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad M(x)dx - N(y)dy = 0. \tag{3.3}$$

De functie F uit (3.1) heeft dus als bijzondere gedaante

$$F(x, y) = \frac{M(x)}{N(y)},$$

m.a.w. de twee veranderlijken x en y zijn volledig uit elkaar gehaald door een factorisatie van de optredende functies.
Is het open gebied V de open rechthoek $]\alpha_1, \beta_1[\times]\alpha_2, \beta_2[$ dan zijn de voorwaarden van de existentiestelling voldaan als:

[1] Scheidbare differentiaalvergelijkingen werden voor het eerst opgelost door de Engelse wiskundige en fysicus Isaac Newton (1642–1727) en de Duitse wiskundige en filosoof Gottfried Leibniz (1646–1716).

This page is intentionally left blank.

Praktisch (Scheidbare differentiaalvergelijkingen)
De algemene oplossing van een scheidbare differentiaalvergelijking kan als volgt gevonden worden:

Stap 1 Schrijf de vergelijking in de differentiaalvorm met de beide veranderlijken volledig gescheiden, of

$$N(y)dy = M(x)dx.$$

Stap 2 Integreer per veranderlijke, en plaats de arbitraire constante in het rechterlid, of

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Stap 3 Werk de algemene oplossing uit tot een goed leesbare impliciete en zo mogelijk expliciete vorm.

Stap 4 Ga na of er eventueel singuliere oplossingen zijn.

This page is intentionally left blank.

3.3.4 Homogene vergelijkingen

Een differentiaalvergelijking van eerste orde noemt men *homogeen* als de functie F een homogene functie is van de graad nul in x en y (zie definitie in Wiskunde II(A)):

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Stelling 3.3.3 *Onderstel dat*

- F *en* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *continu zijn in een open deel* V *van* $\mathbb{R}^2$*, waarbij* V *geen punten gemeen heeft met de* $\mathbf{y}$*-as;*
- $F\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{x}$ *wordt niet nul voor punten* (x, y) *in* V*.*

Dan correspondeert met elke oplossing van de homogene differentiaalvergelijking

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.10}$$

juist één oplossing van de differentiaalvergelijking

$$v' = \frac{F(v) - v}{x},$$

waarin de veranderlijken x *en* v *kunnen gescheiden worden, en omgekeerd.*

This page is intentionally left blank.

Praktisch (Exacte differentiaalvergelijking)
De algemene oplossing van een exacte differentiaalvergelijking kan als volgt gevonden worden:

Stap 1 Schrijf de differentiaalvergelijking in de vorm

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Stap 2 De differentiaalvergelijking is exact als:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Stap 3 De onbekende functie U voldoet aan:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y). \tag{3.16}$$

Stap 4 Los het stelsel op door integratie van beide leden van (3.15) naar x terwijl y constant gehouden wordt:

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y).$$

Om de functie $g(y)$ te bepalen druk uit dat $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$:

$$\int \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)dx + \frac{dg}{dy}(y) = Q(x,y).$$

Hetzelfde resultaat wordt bekomen door te vertrekken van (3.16) en beide leden te integreren naar y terwijl x constant gehouden wordt:

$$U(x,y) = \int Q(x,y)dy + h(x).$$

De functie h volgt dan door uit te drukken dat $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$:

$$\int \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)dy + \frac{dh}{dx}(x) = P(x,y).$$

Stap 5 De algemene oplossing wordt impliciet gegeven door:

$$U(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Voorbeelden 3.3.5

1. We zoeken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$2xydy + y^2dx = 0.$$

<u>*Stap 1*</u> *Differentiaalvorm*:
De differentiaalvergelijking staat al in de vereiste differentiaalvorm.

<u>*Stap 2*</u> *Test op exactheid*:
De differentiaalvergelijking is exact aangezien

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

<u>*Stap 3*</u> *Stelsel voor* $U(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= y^2 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2xy. \end{aligned}$$

<u>*Stap 4*</u> *Berekening van* $U(x, y)$:
Integratie van de eerste gelijkheid naar x levert

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int y^2 dx + g(y) \\ &= xy^2 + g(y). \end{aligned}$$

De partiële afgeleide naar y moet gelijk zijn aan $2xy$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \frac{dg}{dy}(y) = 2xy.$$

Dit impliceert

$$\frac{dg}{dy}(y) = 0$$

en na integratie

$$g(y) = k,$$

met $k \in \mathbb{R}$ een arbitraire constante.
De gezochte functie U is dus van de vorm

$$U(x, y) = xy^2 + k.$$

<u>*Stap 5*</u> *Antwoord*:
De algemene oplossing van de gegeven exacte differentiaalvergelijking wordt impliciet gegeven door

$$xy^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De constante k werd opgeslorpt in C. Vandaar dat in het vervolg de constante k nul gekozen wordt.

This page is intentionally left blank.

3.3.6.2 Integrerende factor

Een andere praktische werkwijze bestaat er in om een integrerende factor $\mu(x)$ te vinden zodat de gegeven differentiaalvergelijking (3.17) een exacte differentiaalvergelijking wordt.

Praktisch (Lineaire differentiaalvergelijking)
De algemene oplossing van een algemene lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking kan als volgt gevonden worden:

Stap 1 Schrijf de differentiaalvergelijking (3.17) in de standaardvorm:

$$y' - A(x)y = B(x).$$

Stap 2 Bepaal een integrerende factor $\mu(x)$ zodat

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)(y' - A(x)y) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \exp(-\int A(x)dx).$$

Stap 3 De algemene oplossing volgt door integratie naar x uit:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)B(x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\mu(x)}\Big(\int \mu(x)B(x)dx + C\Big), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

We staan nog even stil bij de berekening van de integrerende factor $\mu(x)$:

$$\begin{aligned}(\mu(x)y)' = \mu(x)(y' - A(x)y) &\Leftrightarrow \mu'(x)y + \mu(x)y' = \mu(x)y' - A(x)\mu(x)y \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -A(x) \qquad (\text{ond}: \ \mu(x) \neq 0, y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \ln|\mu(x)| = -\int A(x)dx \\ &\Leftrightarrow \mu(x) = \exp(-\int A(x)dx)\end{aligned}$$

waarbij we de integratieconstante hebben weggelaten aangezien we slechts één integrerende factor $\mu(x)$ nodig hebben.
Vullen we in (3.20) de uitdrukking voor $\mu(x)$ in dan vinden we precies de algemene oplossing (3.19).

Voorbeeld 3.3.6 De differentiaalvergelijking

$$y' + 2xy = x$$

is lineair, niet-homogeen en van de eerste orde. We lossen ze op met de hierboven beschreven methode, waarbij we voor de eenvoud in de notatie het argument x weglaten bij de functie μ.

Stap 1 *Standaardvorm*:
De gegeven differentiaalvergelijking staat in de vereiste vorm.

This page is intentionally left blank.

Praktisch (Differentiaalvergelijking van Bernoulli)
De algemene oplossing van een differentiaalvergelijking van Bernoulli kan als volgt gevonden worden:

Stap 1 Schrijf de vergelijking in de vorm

$$y' - A(x)y = B(x)y^{\alpha}$$

met $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 1$.

Stap 2 Deel beide leden van de differentiaalvergelijking door y^{α}, of vermenigvuldig met de factor $y^{-\alpha}$:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} - A(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = B(x). \tag{3.23}$$

Stap 3 Kies de geschikte substitutie (die onmiddellijk zichtbaar wordt bij de coëfficiënt $A(x)$), en schrijf die ook voor de afgeleide:

$$w(x) = \frac{y(x)}{y^{\alpha}(x)} = y^{1-\alpha}(x) \quad \text{en} \quad w'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x).$$

Stap 4 Werk de differentiaalvergelijking om tot een vergelijking met de variabelen x en w in plaats van x en y:

$$w'(x) - (1-\alpha)A(x)w(x) = (1-\alpha)B(x).$$

Stap 5 Bepaal de algemene oplossing van deze lineaire differentiaalvergelijking.

Stap 6 Herschrijf de oplossing met y in plaats van w door opnieuw gebruik te maken van de substitutie.

Stap 7 Ga na of er eventueel singuliere oplossingen zijn.

Opmerking Wanneer we de oorspronkelijke differentiaalvergelijking delen door de factor y^{α}, dan onderstellen we eigenlijk dat $y \neq 0$. De situatie $y = 0$ moet uiteraard afzonderlijk onderzocht worden, m.a.w. we gaan na of er singuliere oplossingen zijn.

Voorbeeld 3.3.7 Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y' + xy = 3xy^2.$$

Stap 1 *Standaardvorm*:
De differentiaalvergelijking staat reeds in de standaardvorm voor een vergelijking van Bernoulli met $\alpha = 2$.

Stap 2 *Keuze van de substitutie*:
Deling door $y^2 (\neq 0)$ levert:

$$\frac{y'}{y^2} + x\frac{1}{y} = 3x$$

This page is intentionally left blank.

3.4 Lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten

Een belangrijke klasse van differentiaalvergelijkingen vormen de *lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten*. Dit zijn vergelijkingen van de vorm:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x),$$

waarin $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ en de *storingsterm* g een gegeven functie is. De vergelijking moet m.a.w. lineair zijn in de afhankelijke veranderlijke y en haar afgeleiden y',..., $y^{(n)}$; de onafhankelijke veranderlijke x komt niet expliciet voor in het linkerlid van de vergelijking.
Als g de nulfunctie is dan heet de differentiaalvergelijking *homogeen* of *gereduceerd*.
Vergelijkingen van eerste en tweede orde met een constante storingsterm worden uitvoerig behandeld. Hogere orde en niet-constante storingstermen komen kort aan bod.

3.4.1 Eerste-orde lineaire differentiaalvergelijkingen

Als de coëfficiënten $A(x)$ en $B(x)$ in de algemene lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde (3.17) constante functies zijn, dan spreken we van een eerste-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, zoals bijvoorbeeld

$$y' + ay = b \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

We zullen eerst het geval bestuderen dat $b = 0$, dit is de homogene of gereduceerde vergelijking.

3.4.1.1 De gereduceerde vergelijking

Alle oplossingen van de gereduceerde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$y' + ay = 0, \qquad a \in \mathbb{R},$$

die we vinden via scheiding der veranderlijken, worden gegeven door

$$y = Ce^{-ax}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

waarbij de arbitraire constante kan bepaald worden door een gegeven beginvoorwaarde (x_0, y_0):

$$y_0 = Ce^{-ax_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = y_0 e^{ax_0}.$$

Uit observatie van de differentiaalvergelijking blijkt dat oplossingen functies zijn waarvan de eerste afgeleide een veelvoud is van de oorspronkelijke functie. De klasse van de exponentiële functies $\exp(sx)$ voldoet hieraan. Een eenvoudige manier, die bovendien uitbreidbaar is naar hogere-orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, om aan de geschikte exponentiële functies te geraken, maakt gebruik van de *karakteristieke vergelijking* die wordt geassocieerd met de gereduceerde differentiaalvergelijking. Men vervangt daartoe de n-de afgeleide van de onbekende functie $y(x)$ door de n-de macht van een onbekende scalair s (hier dus met $n = 1$):

$$s + a = 0.$$

This page is intentionally left blank.

3.4.4 Een algemene storingsterm

De tot nu toe bestudeerde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten hadden een constante storingsterm. We bekijken nu het geval van een variabele storingsterm. We zoeken dus de algemene oplossing van

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x),$$

met $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ en g een reële functie van x.
Aan de algemene oplossing y_g van de gereduceerde vergelijking verandert er niets ten opzichte van hiervoor. Enkel de particuliere oplossing y_p van de niet-gereduceerde vergelijking zal nu anders zijn. Het vinden van een particuliere oplossing is niet altijd eenvoudig tenzij $g(x)$ een specifieke gedaante heeft, namelijk een veelterm in x, een exponentiële functie, een cosinus- of een sinusfunctie, of een combinatie van deze types. Voor de meeste differentiaalvergelijkingen die ontstaan uit de mathematische vertolking van economische en technologische problemen is dit inderdaad het geval.
De beperking op de structuur van de functie $g(x)$ heeft als groot voordeel dat er geen ingewikkelde oplossingsmethodes moeten worden opgesteld, maar dat we het probleem op een eenvormige manier kunnen aanpakken.
Meer bepaald bekijken we de volgende situaties:

1. $g(x) = V_m(x) = \tilde{a}_m x^m + \tilde{a}_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \tilde{a}_0,\ m \in \mathbb{N}$
2. $g(x) = \tilde{a} e^{\alpha x}$
3. $g(x) = \tilde{a}_1 \cos(\beta x) + \tilde{a}_2 \sin(\beta x)$
4. $g(x) = V_m(x) e^{\alpha x}$
5. $g(x) = V_m(x) \cos(\beta x)$ of $g(x) = V_m(x) \sin(\beta x)$
6. $g(x) = e^{\alpha x} V_m(x) \cos(\beta x)$ of $g(x) = e^{\alpha x} V_m(x) \sin(\beta x)$
7. lineaire combinaties van de voorgaande situaties.

De eenvormige manier om één particuliere oplossing van de volledige, niet-gereduceerde differentiaalvergelijking te vinden indien de functie $g(x)$ behoort tot één van de vermelde klassen, is de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
De achterliggende idee is dat we een particuliere oplossing construeren van dezelfde gedaante als $g(x)$. We moeten deze functie dan wel veralgemenen en de coëfficiënten zodanig kiezen dat de voorgestelde functie effectief voldoet aan de differentiaalvergelijking, m.a.w. we bepalen de coëfficiënten door substitutie van de particuliere oplossing in de vergelijking.

Hieronder geven we een overzicht van de particuliere oplossing die we moeten proberen, gegeven een tweede lid van een speciale vorm:

1. een veelterm $V_m(x)$ van graad m, $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \qquad y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_0, \qquad m \in \mathbb{N}$$

(neem steeds de volledige veelterm van graad m);

2. een exponentiële functie $ae^{\alpha x}$ met $a, \alpha \in \mathbb{R}$

   $$\Rightarrow \qquad y_p(x) = Ae^{\alpha x}$$

   (de coëfficiënt α niet veralgemenen);

3. (een combinatie van) $\cos(\beta x)$ en/of $\sin(\beta x)$

   $$\Rightarrow \qquad y_p(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$$

   (gebruik steeds zowel de cosinus als de sinus);

4. een product van een veelterm $V_m(x)$ van graad m en een exponentiële $e^{\alpha x}$

   $$\Rightarrow \qquad y_p(x) = e^{\alpha x}(A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_0)$$

5. een product van een veelterm $V_m(x)$ van graad m en $\cos(\beta x)$ (of $\sin(\beta x)$)

   $$\Rightarrow \qquad y_p(x) = Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)$$

   met
   $$\begin{aligned} Q_1(x) &= A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_0, \\ Q_2(x) &= B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \cdots + B_0, \end{aligned}$$

   veeltermen van graad m, $m \in \mathbb{N}$.

6. een product van een veelterm $V_m(x)$ van graad m, een exponentiële $e^{\alpha x}$ en $\cos(\beta x)$ (of $\sin(\beta x)$)

   $$\Rightarrow \qquad y_p(x) = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$$

   met $Q_1(x)$ en $Q_2(x)$ veeltermen van graad m (zoals hiervoor).

Als $g(x)$ of een deel van $g(x)$ echter van dezelfde vorm is als de algemene oplossing y_g zullen we de voorgestelde vorm nog moeten vermenigvuldigen met een macht van x.
Indien we dit niet vooraf vaststellen dan zullen niet alle onbepaalde coëfficiënten kunnen gevonden worden door substitutie van de voorgestelde particuliere oplossing in de differentiaalvergelijking.

We zullen dit illustreren voor tweede-orde differentiaalvergelijkingen. We merken hierbij nog op dat (1) en (2) bijzondere gevallen zijn van (4) terwijl (3) en (5) bijzonder gevallen zijn van (6). Het volstaat dus de gevallen (4) en (6) te bespreken. De gedaante in (4) is geldig als α geen wortel is van de karakteristieke vergelijking. Is α een enkelvoudige wortel dan vermenigvuldigen we de gedaante met x. Is α een dubbele wortel dan vermenigvuldigen we met x^2. De gedaante in (6) is geldig als de discriminant $D \geq 0$. Is $D < 0$ dan is ze geldig als $\alpha \neq p$ of $\beta \neq q$ of $\beta \neq 2\pi - q$. Is $D < 0$ én $\alpha = p$ én ($\beta = q$ of $\beta = 2\pi - q$), dan moeten we de gedaante vermenigvuldigen met x.

Voorbeelden 3.4.6

1. Bepaal een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking

   $$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 - 6.$$

This page is intentionally left blank.

3.5 Economische toepassingen

volgens een vaste verhouding. Solow daarentegen wil het geval bestuderen waarbij kapitaal en arbeid in variërende verhoudingen kunnen gecombineerd worden. Hij gebruikt de productiefunctie

$$Y = F(K, L) \qquad K, L > 0,$$

waarbij Y staat voor de output, K voor het kapitaal en L voor de arbeid of voor het aantal werknemers.
Het model steunt op de volgende hypothesen:

(1) een constant breukdeel s van de output Y wordt geïnvesteerd:

$$\frac{dK}{dt} = I = sY$$

met s opnieuw de marginale spaarquote;
de depreciatievoet δ van de kapitaalvoorraad hebben we voor de eenvoud nul gesteld;

(2) arbeid groeit exponentieel of m.a.w. de groeisnelheid van arbeid is constant:

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dt} = n \qquad n > 0;$$

(3) de productiefunctie is lineair homogeen zodat

$$F(K, L) = LF(\frac{K}{L}, 1),$$

en stel

$$f(k) = F(k, 1) \quad \text{met} \quad k = \frac{K}{L} \quad \text{de kapitaalvoorraad per werknemer;}$$

bijvoorbeeld de Cobb-Douglas productiefunctie $K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ voldoet en $f(k) = k^{\alpha}$.

Deze hypothesen leiden tot de differentiaalvergelijking

$$\frac{dk}{dt} + nk = sf(k).$$

Inderdaad, leiden we $k = K/L$ af naar t met behulp van de kettingregel, aangezien K en L zelf functies zijn van t, dan vinden we:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\dfrac{dK}{dt} - K\dfrac{dL}{dt}}{L^2}.$$

Gebruiken we nu eerst hypothesen (1) en (2), en vervolgens hypothese (3) terwijl we de overgebleven verhoudingen K/L gelijk aan k stellen, dan komen we tot:

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dt} &= \frac{1}{L}\frac{dK}{dt} - \frac{K}{L}\left(\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\right)\\ &= \frac{1}{L}sF(K, L) - \frac{K}{L}n\\ &= sf(k) - kn.\end{aligned}$$

Brengen we tenslotte de term kn naar het ander lid, dan bekomen we de hoger vermelde differentiaalvergelijking.
In het geval van de Cobb-Douglas-productiefunctie kennen we $f(k)$ en de differentiaalvergelijking is van het type Bernoulli:

$$\frac{dk}{dt} + nk = sk^{\alpha}. \tag{3.31}$$

De substitutie $w = k^{1-\alpha}$ leidt tot de lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

$$\frac{dw}{dt} + (1-\alpha)nw = s(1-\alpha),$$

met als oplossing

$$w(t) = \frac{s}{n} + Ce^{-(1-\alpha)nt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Aldus vinden we

$$(k(t))^{1-\alpha} = \frac{s}{n} + Ce^{-(1-\alpha)nt}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

waarbij we de arbitraire constante bepalen uit

$$(k(0))^{1-\alpha} = \frac{s}{n} + C.$$

De algemene oplossing van de vergelijking van Bernoulli is (in impliciete gedaante)

$$(k(t))^{1-\alpha} = \frac{s}{n} + [(k(0))^{1-\alpha} - \frac{s}{n}]e^{-(1-\alpha)nt}.$$

Met de onderstelling dat $0 < \alpha < 1$ en $n > 0$ zal het oplossingenpad ongeacht de arbitraire constante C of ongeacht de beginvoorwaarde $k(0)$, convergeren:

$$k(t) = \frac{K}{L} \to \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{als} \quad t \to +\infty.$$

Dus de kapitaalvoorraad per werknemer bereikt op lange termijn een evenwicht dat precies het statisch evenwicht is, m.a.w. het dynamisch evenwicht valt samen met het statisch evenwicht. Om dit laatste in te zien moeten we nog het statisch evenwicht bepalen. Dit evenwicht is de constante waarde k_e die k aanneemt als we onderstellen dat k onafhankelijk is van de tijd. Om k_e te vinden moeten we dus dk/dt nul stellen in (3.31):

$$0 + nk_e = sk_e^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad k_e^{1-\alpha} = \frac{s}{n} \quad \Leftrightarrow \quad k_e = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

3.5.3 Het prijsaanpassingsmodel van Evans

Dit dynamisch model beschrijft een specifieke markt van een economisch goed en berust op de hypothesen:

(1) de vraag- en aanbodfunctie zijn lineair:

$$\begin{aligned} D(p) &= \alpha - \beta p \qquad && \alpha, \beta > 0, \\ S(p) &= -\gamma + \delta p \qquad && \gamma, \delta > 0; \end{aligned}$$

This page is intentionally left blank.

Hoofdstuk 4

De transformatie van Laplace

In het vorige hoofdstuk hebben we geleerd hoe we bepaalde types differentiaalvergelijkingen kunnen oplossen. Een andere aanpak voor het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten is het gebruik van de Laplacetransformatie. De naam is afkomstig van de Franse wiskundige Pierre Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), die zijn theorie gepubliceerd heeft in 1782. Deze methode heeft heel wat toepassingsgebieden, in het bijzonder in de fysica en in de ingenieurswetenschappen.

In dit hoofdstuk definiëren we de transformatie, beschrijven haar voornaamste eigenschappen, geven een existentiestelling, en bepalen de Laplace- en de inverse Laplacetransformatie van enkele elementaire functies. Met deze bagage kunnen we vervolgens bepaalde types differentiaalvergelijkingen oplossen.

4.1 Definitie en existentiestelling

Definitie 4.1.1 *De Laplacetransformatie is een transformatie die met een complexwaardige functie f van een reële veranderlijke t, $t \geq 0$, een functie F van de complexe veranderlijke s laat corresponderen waarbij F gedefinieerd wordt door*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{4.1}$$

Men noemt $F(s)$, ook $\mathcal{L}[f(t)]$ genoteerd, de Laplacegetransformeerde van $f(t)$.
Deze Laplacegetransformeerde is gedefinieerd voor alle $s \in \mathbb{C}$ waarvoor de integraal in het rechterlid van (4.1) absoluut convergeert, i.e. voor alle $s \in \mathbb{C}$ waarvoor

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x |e^{-st} f(t)| dt$$

bestaat en eindig is.
Verder noemt men f de originele of oorspronkelijke functie en F het beeld.

Merk op dat voor $s = \operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s$

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)|$$

en dat derhalve de convergentie van (4.1) afhangt van het reële deel van s.

Alvorens dieper in te gaan op het bestaan van de oneigenlijke integraal (4.1) staan we eerst even stil bij de betekenis van de Laplacetransformatie en geven enkele voorbeelden. De bovenstaande definitie beschrijft hoe een functie f van een reële veranderlijke t omgezet wordt in de functie F van de complexe veranderlijke s door de zogenaamde Laplacetransformatie. Deze maakt deel uit van een ruimere klasse integraaltransformaties van de vorm

$$F(s) = \int_A^B G(s,t) f(t) dt$$

met G een gegeven functie.
Men kan de Laplacetransformatie ook zien als een manier om de functie f te vergelijken met de exponentiële functie over het interval $[0, +\infty[$ waarbij de integraal het middel is om te vergelijken.
De bedoeling is om de functies F te vinden voor de meest gebruikte functies f, om na te gaan hoe de eigenschappen van f uitgedrukt kunnen worden in termen van F, en om het inverse proces, namelijk om f te vinden als F gegeven wordt, te bestuderen.

Voorbeelden 4.1.1 We zullen de Laplacegetransformeerde berekenen voor vier elementaire functies. Hiertoe zullen we de volgende resultaten nodig hebben:

$$\int e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} + C, \quad s \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st} = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \\ +\infty & \text{als} \quad \mathrm{Re}\, s < 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

1) De Laplacetransformatie zet de constante functie $f(t) = 1$, $t \geq 0$, om in

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= \frac{1}{s} - \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-st}}{s} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

   als $\mathrm{Re}\, s > 0$.

2) De Laplacegetransformeerde van de exponentiële functie $f(t) = e^{\alpha t}$, met $\alpha \in \mathbb{C}$ en $\alpha \neq s$, is

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \left.\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\alpha} \lim_{t\to+\infty} e^{-(s-\alpha)t} \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \end{aligned}$$

   als $\mathrm{Re}\,(s-\alpha) > 0$ of m.a.w. als $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, \alpha$.

This page is intentionally left blank.

4.5 Beginwaardeproblemen

In deze paragraaf stellen we een drie-fasen-methode voor die gebruikmaakt van de Laplacetransformatie om beginwaardeproblemen met zowel één differentiaalvergelijking als met een stelsel differentiaalvergelijkingen op te lossen.

4.5.1 De drie-fasen-methode

Het basisidee achter de drie-fasen-methode is het beginwaardeprobleem m.b.v. de Laplacetransformatie herleiden tot een algebraïsche vergelijking.
Dit gebeurt als volgt:

Fase 1 Pas de Laplacetransformatie toe op beide leden van de differentiaalvergelijking en het resultaat is een algebraïsche vergelijking.

Fase 2 Substitueer de beginwaarde en los de algebraïsche vergelijking op.

Fase 3 Pas de inverse Laplacetransformatie toe om de oplossing van de algebraïsche vergelijking om te zetten naar de oplossing van het beginwaardeprobleem.

Voorbeeld 4.5.1
We illustreren de voorgestelde methode aan de hand van het beginwaardeprobleem

$$y' = -4y - 1, \quad y(0) = 3$$

waarvan de oplossing ook rechtstreeks kan bekomen worden daar de differentiaalvergelijking lineair is van de eerste orde en met constante coëfficiënten. We zullen de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}[y(t)]$ noteren als $Y(s)$.

Fase 1 De Laplacetransformatie toepassen op beide leden van de differentiaalvergelijking levert

$$\mathcal{L}[y'(t)] = \mathcal{L}[-4y(t) - 1].$$

In het linkerlid gebruiken we stelling 4.2.2 en in het rechterlid de lineariteitseigenschap om te komen tot

$$sY(s) - y(0) = -4Y(s) - \frac{1}{s}.$$

Fase 2 Substitutie van de beginvoorwaarde $y(0) = 3$ leidt vervolgens na wat herschikken van de termen tot:

$$(s+4)Y(s) = 3 - \frac{1}{s}$$

waaruit onmiddellijk

$$Y(s) = \frac{3}{s+4} - \frac{1}{s(s+4)}.$$

Fase 3 We passen nu op beide leden de inverse Laplacetransformatie toe die lineair is:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+4)}\right] \\ \Leftrightarrow \quad y(t) &= 3e^{-4t} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+4)}\right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Om de inverse Laplacegetransformeerde van $\dfrac{1}{s(s+4)}$ te kunnen berekenen voeren we een splitsing in partieelbreuken uit. Daartoe bepalen we de onbepaalde coëfficiënten A en B in

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = A(s+4) + Bs \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A+B & = 0 \\ 4A & = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dit levert

$$\frac{1}{s(s+4)} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s+4)}$$

en

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+4)}] = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+4}] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t}.$$

Substitutie hiervan in (4.9) geeft de oplossing van het beginwaardeprobleem:

$$y(t) = \frac{13}{4}e^{-4t} - \frac{1}{4}.$$

Deze drie-fasen-methode kunnen we op analoge manier toepassen om de oplossing van een stelsel differentiaalvergelijkingen te vinden. We illustreren dit a.h.v. het volgend voorbeeld.

Voorbeeld 4.5.2 Beschouw het stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -y + z \end{cases} \qquad y(0) = z(0) = 1.$$

De drie-fasen-methode gaat in dit geval als volgt:

Fase1 Stel $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ en $\mathcal{L}[z(t)] = Z(s)$.
We passen de Laplacetransformatie toe op beide leden van elke vergelijking en bekomen aldus het algebraïsch stelsel

$$\begin{cases} sY(s) - y(0) & = Y(s) + Z(s) \\ sZ(s) - z(0) & = -Y(s) + Z(s) \end{cases}$$

This page is intentionally left blank.

4.5.3 Toepassingen

Als toepassing bestuderen we het probleem waarbij op een (metalen) veer discontinue krachten worden uitgeoefend. Bijvoorbeeld nemen we het beginwaardeprobleem

$$y'' = -2y' - 5y + f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

met

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t \in [0, 10[\\ 0 & \text{voor } t \in [10, +\infty[. \end{cases}$$

Dit houdt in dat een eenheidskracht gedurende 10 seconden wordt uitgeoefend op een veer die zich initieel in een evenwichtstoestand bevindt, waarna de kracht wordt verwijderd. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een verticale veer in een lift die eerst met een constante snelheid naar beneden beweegt om dan gedurende 10 seconden te vertragen om uiteindelijk te stoppen. Wat is de beweging van deze veer?

Om dit probleem aan te pakken met de drie-fasen-methode herschrijven we de differentiaalvergelijking als

$$y''(t) = -2y'(t) - 5y(t) + 1 - u_{10}(t).$$

Noteren we $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ en passen we op beide leden de Laplacetransformatie toe rekening houdend met de lineariteitseigenschap en de afleidingseigenschap dan bekomen we

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = -2sY(s) + 2y(0) - 5Y(s) + \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}.$$

Substitutie van de beginvoorwaarden en oplossen naar $Y(s)$ levert

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-10s}}{s(s^2 + 2s + 5)}.$$

Splitsing in partieelbreuken geeft

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5s} - \frac{s + 2}{5[(s + 1)^2 + 4]}$$

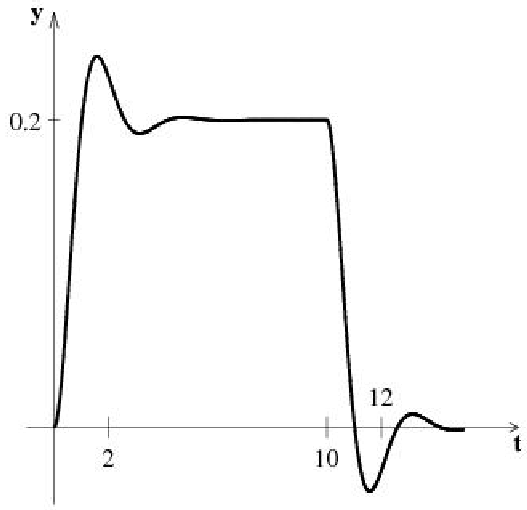
zodat

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-10s}}{5s} - \frac{1 - e^{-10s}}{5}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right],$$

waarbij we er voor zorgden om $s + 1$ zowel in teller als noemer te laten voorkomen.

Laten we vervolgens op beide leden de inverse Laplacetransformatie inwerken, dan luidt de oplossing

$$\begin{aligned} y(t) =& \frac{1 - u_{10}(t)}{5} - e^{-t}\left(\frac{\cos 2t}{5} + \frac{\sin 2t}{10}\right) \\ &+ u_{10}(t)e^{10-t}\left[\frac{\cos 2(t - 10)}{5} + \frac{\sin 2(t - 10)}{10}\right], \end{aligned}$$



Figuur 4.15: Grafiek van de oplossing van het probleem van de harmonische oscillator waarop een discontinue kracht werkt

die expliciet kan geschreven worden als

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} - e^{-t}(\dfrac{\cos 2t}{5} + \dfrac{\sin 2t}{10}) & \text{voor } t \in [0, 10[\\ -e^{-t}(\dfrac{\cos 2t}{5} + \dfrac{\sin 2t}{10}) & \\ \quad + e^{10-t}[\dfrac{\cos 2(t-10)}{5} + \dfrac{\sin 2(t-10)}{10}]. & \text{voor } t \in [10, +\infty[\end{cases}$$

Dit is een continue functie waarvan de grafiek te zien is in figuur 4.15.

Hoofdstuk 5

Vectorruimtes

5.1 De reële vectorruimte $\mathbb{R}^n$

In paragraaf 1.1 hebben we de optelling van vectoren van gedefinieerd evenals de vermenigvuldiging van een vector van met een scalair. Als we vectoren noteren als n-tallen zoals bijvoorbeeld $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dan voldoet $\mathbb{R}^n$ voorzien van deze bewerkingen aan de volgende tien eigenschappen die een *lineaire ruimte* over $\mathbb{R}$ of een *reële vectorruimte* axiomatisch definiëren. Voor $V = \mathbb{R}^n$ zijn de tien eigenschappen:

A1) de optelling is inwendig voor V:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ : \ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V;$$

A2) de optelling is commutatief:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ : \ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

A3) de optelling is associatief, dit betekent:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \ : \ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

A4) er bestaat in V een neutraal element voor de optelling dat we noteren door $\mathbf{0}$:

$$\forall \mathbf{x} \in V \ : \ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};$$

A5) elk element $\mathbf{x}$ van V heeft een symmetrisch element voor de optelling dat we noteren als $-\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

A6) voor elke vector $\mathbf{x}$ van V en elk scalair $\alpha \in \mathbb{R}$ definieert $\alpha\mathbf{x}$ op ondubbelzinnige manier een vector in V, m.a.w. de vermenigvuldiging van een vector van V met een scalair is een afbeelding van $\mathbb{R} \times V$ in V die met elk koppel $(\alpha, \mathbf{x})$ de vector $\alpha\mathbf{x}$ laat corresponderen;

A7) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y};$

This page is intentionally left blank.

5.7 Eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix

Eigenwaarden en eigenvectoren hebben heel wat toepassingen in economie, statistiek en econometrie: bijvoorbeeld om het positief definiet zijn na te gaan van een kwadratische vorm, om een matrix te diagonaliseren, om de principale componenten te bepalen in de principale componentenmethode, om de vergelijkingen van een stelsel differentievergelijkingen te ontkoppelen, om het statisch evenwicht te bepalen in een Markovproces. We verduidelijken het laatste geval aan de hand van het volgend Markovproces.

Voorbeeld 5.7.1 Een economie varieert van jaar tot jaar tussen groei en recessie volgens een waarschijnlijkheidswet weergegeven door de transitiematrix in tabel 5.1. Dus de kans om in de

		volgende toestand	
		groei	recessie
huidige toestand	groei	p	$1-p$
	recessie	$1-q$	q

Tabel 5.1: Transitiematrix van een economie.

groeitoestand te blijven is p en om over te gaan van groei naar recessie $1-p$. In praktijk maakt

men zo'n model om de toestand van de economie op lange termijn te kennen als $0 < p < 1$ en $0 < q < 1$. We merken hierbij nog op dat de transitiewaarschijnlijkheden niet afhangen van de toestand van de vorige jaren maar enkel van de huidige toestand.
Noteren we met π_t de kans dat de economie groeit in periode t en met $1 - \pi_t$ de kans dat de economie in recessie is in periode t, dan kan het systeem als geheel beschreven worden door de vector

$$\mathbf{p}_t = \begin{pmatrix} \pi_t \\ 1 - \pi_t \end{pmatrix}.$$

In vectornotatie beantwoordt het Markovproces aan de transitievergelijking

$$\mathbf{p}_{t+1} = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} \mathbf{p}_t,$$

waarbij de matrix de getransponeerde is van de transitiematrix.
Bijvoorbeeld is de kans op groei in periode $t+1$, genoteerd als π_{t+1}, gelijk aan (de kans op groei in periode t *maal* de kans op transitie naar groei) + (de kans op recessie in periode t *maal* de kans op transitie naar groei):

$$\pi_{t+1} = \pi_t p + (1 - \pi_t)(1 - q).$$

Noteren we de transitievergelijking kortweg als

$$\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{p}_t \tag{5.6}$$

dan geldt er

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{A}^t\, \mathbf{p}_0 \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

Om de toestand van de economie op lange termijn te kennen moeten we de limietwaarde berekenen van $\mathbf{p}_t$, als zo'n limiet bestaat. Intuïtief is het duidelijk dat de limietwaarde zal overeenkomen met het statisch evenwicht, ook de stationaire toestand genoemd, van dit Markovproces. Immers voor voldoende grote waarden van t gedragen $\mathbf{p}_{t+1}$ en $\mathbf{p}_t$ zich op dezelfde manier omdat de invloeden van de begintoestand niet meer inwerken. Derhalve kunnen we voor voldoende grote waarden van t stellen dat $\mathbf{p}_{t+1} = \mathbf{p}_t \overset{\text{not}}{=} \mathbf{p}$ in (5.6). Dit levert precies de transitievergelijking van het statisch evenwicht:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}\,.$$

Dit is een "eigenwaardevergelijking" voor de matrix $\mathbf{A}$. Het gezochte statisch evenwicht $\mathbf{p}$ is een "eigenvector" van $\mathbf{A}$ behorende bij de "eigenwaarde" $\lambda = 1$.

In deze paragraaf zullen we de basisnoties van eigenwaarden en eigenvectoren bijbrengen. We zullen ons beperken tot *reële* eigenwaarden en eigenvectoren aangezien we voornamelijk geïnteresseerd zijn in economische toepassingen.
We hebben wel nog het volgend matrixbegrip nodig.

Definitie 5.7.1 *Het* **spoor** *van een vierkante $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ is de som van de hoofddiagonaalelementen a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, van $\mathbf{A}$ en wordt genoteerd als sp $(\mathbf{A})$:*

$$sp\,(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

This page is intentionally left blank.

5.7.5 Toepassingen

Stelsels lineaire eerste orde differentievergelijkingen of differentiaalvergelijkingen kunnen neergeschreven worden in matrix/vectorgedaante. Als de vergelijkingen gekoppeld zijn, kunnen ze ontkoppeld worden door diagonalisatie van de optredende matrix. Aldus spelen eigenwaarden en eigenvectoren een belangrijke rol bij het oplossen van dergelijke dynamische modellen. We illustreren dit aan de hand van twee voorbeelden.

(1) We hernemen het inleidend voorbeeld 5.7.1 van een economie waarvan de jaarlijkse evolutie beschreven wordt door een Markovproces. We hadden gevonden dat

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{p}_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.8}$$

waarbij $\mathbf{A}$ de getransponeerde is van de gegeven transitiematrix. Om de limietwaarde van $\mathbf{p}_t$ te berekenen als $t \to +\infty$, zouden we eerst $\mathbf{A}^t$ moeten uitrekenen. Dit is duidelijk niet eenvoudig. We zullen proberen $\mathbf{A}$ te diagonaliseren zodat de berekening wel eenvoudig wordt.
We zoeken daartoe eerst de eigenwaarden van $\mathbf{A}$. De karakteristieke vergelijking luidt:

$$\begin{vmatrix} p-\lambda & 1-q \\ 1-p & q-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda - (p+q-1)) = 0.$$

$\mathbf{A}$ heeft als eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = p+q-1$. Wegens de onderstelling dat p en q waarschijnlijkheden zijn met $0 < p < 1$ en $0 < q < 1$ zal $-1 < p+q-1 < 1$, en heeft $\mathbf{A}$ twee verschillende eigenwaarden. Aldus bestaat er een niet-singuliere matrix $\mathbf{P}$ met als kolommen de eigenvectoren van $\mathbf{A}$ behorende bij λ_1 en λ_2, zodat

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p+q-1 \end{pmatrix} \overset{\text{not}}{=} \mathbf{D}. \tag{5.9}$$

De eigenvectoren van $\mathbf{A}$ behorende bij de eigenwaarde 1 zijn oplossingen van het stelsel

$$\begin{pmatrix} p-1 & 1-q \\ 1-p & q-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dat reduceert tot één vergelijking:

$$(p-1)x_1 + (1-q)x_2 = 0.$$

Vermits $p - 1 \neq 0$ en $1 - q \neq 0$, zijn de eigenvectoren van de vorm

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 1-q \\ 1-p \end{pmatrix}, \qquad \ell \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

De eigenvectoren van $\mathbf{A}$ behorende bij $p+q-1$ zijn oplossingen van het stelsel

$$\begin{pmatrix} p-(p+q-1) & 1-q \\ 1-p & q-(p+q-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-q & 1-q \\ 1-p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \qquad \text{vermits } 1-p \neq 0 \neq 1-q$$

This page is intentionally left blank.

5.8 Lineaire afbeeldingen en lineaire transformaties

In hoofdstuk 2 van Wiskunde IIA hebben we functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ ingevoerd om het verband tussen economische grootheden te kunnen uitdrukken. De n veranderlijken kunnen zelf ook afhangen van k andere veranderlijken, waarbij het verband beschreven wordt door een vectorfuntie $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.
We hebben in dit hoofdstuk gezien dat $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ en $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vectorruimtes zijn. Dus de vectorfunctie g beschrijft hoe we kunnen overgaan van de ene vectorruimte naar de andere. Als de functie g bovendien de lineariteit van de vectorruimtes behoudt, spreken we van een *lineaire afbeelding* (lineaire transformatie als $k = n$). Anderzijds hebben we ook gezien dat het product $\mathbf{Ax}$ van een matrix $\mathbf{A}$ en een vector $\mathbf{x}$ opnieuw een vector is, bijvoorbeeld $\mathbf{y}$ genoteerd. Dan is $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, en de elementen van $\mathbf{y}$ zijn lineaire combinaties van de elementen van $\mathbf{x}$. De matrix $\mathbf{A}$ beschrijft dus in feite een lineaire afbeelding van $\mathbf{x}$ op $\mathbf{y}$.

In deze paragraaf zullen we lineaire afbeeldingen en transformaties bestuderen en in het bijzonder het verband met matrices.

5.8.1 Definitie en voorbeelden

Definitie 5.8.1 *Een afbeelding f van $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$ heet een* **lineaire afbeelding** *van de (reële) vectorruimte $\mathbb{R}^k$ in de (reële) vectorriumte $\mathbb{R}^n$ als*

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^k,\ \forall\, s, t \in \mathbb{R}\colon f(s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2) = sf(\mathbf{x}_1) + tf(\mathbf{x}_2).$$

Is $k = n$ dan spreken we van een **lineaire transformatie** *van $\mathbb{R}^n$.*

Dus een lineaire afbeelding beeldt elke lineaire combinatie van vectoren van $\mathbb{R}^k$ af op dezelfde lineaire combinatie — d.i. met dezelfde scalaire factoren — van de beeldvectoren in $\mathbb{R}^n$. Op die manier worden de lineariteitseigenschappen behouden bij overgang van $\mathbb{R}^k$ naar $\mathbb{R}^n$. In het bijzonder voor $s = t = 0$ wordt de nulvector van $\mathbb{R}^k$ afgebeeld op de nulvector van $\mathbb{R}^n$.

Voorbeelden 5.8.1

(1) Beschouw de afbeelding $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \mathbf{x} \mapsto f_1(\mathbf{x})$ met

$$f_1(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3).$$

f_1 is een lineaire afbeelding gelet op

$$\begin{aligned}
&f_1(s\mathbf{x} + t\mathbf{y})\\
&= \big((sx_1 + ty_1) + (sx_2 + ty_2) - (sx_3 + ty_3),\ 2(sx_1 + ty_1) + 2(sx_2 + ty_2) - 2(sx_3 + ty_3)\big)\\
&= \big(s(x_1 + x_2 - x_3) + t(y_1 + y_2 - y_3),\ s(2x_1 + 2x_2 - 2x_3) + t(2y_1 + 2y_2 - 2y_3)\big)\\
&= s(x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3) + t(y_1 + y_2 - y_3,\ 2y_1 + 2y_2 - 2y_3)\\
&= sf_1(\mathbf{x}) + tf_1(\mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, s, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

This page is intentionally left blank.

5.8.6 Toepassingen

(1) In de econometrie bestudeert men een model

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

met $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ en $E(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = \sigma^2\boldsymbol{\Omega}$. Hierin staat $E(\cdot)$ voor de verwachtingswaarde en $\sigma^2\boldsymbol{\Omega}$ voor de variantie-covariantiematrix. De bedoeling is een transformatiematrix $\mathbf{T}$ te vinden zodat

$$\mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 - \rho y_1 \\ \vdots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Om de $(n-1) \times n$-matrix $\mathbf{T}$ te vinden vatten we $\mathbf{T}$ op als de matrix van een lineaire afbeelding f van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ t.o.v. de canonische basissen E_n en E_{n-1}:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} C_{E_{n-1}}(f(\mathbf{e}_1)) & \cdots & C_{E_{n-1}}(f(\mathbf{e}_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix},$$

waarbij f gegeven wordt door

$$f(\mathbf{y}) = (y_2 - \rho y_1, \ldots, y_n - \rho y_{n-1}), \qquad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

We berekenen de beelden $f(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, \ldots, n$ aan de hand van dit functievoorschrift:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= (-\rho, 0, 0, \ldots, 0, 0) \\ f(\mathbf{e}_2) &= (1, -\rho, 0, \ldots, 0, 0) \\ &\vdots \\ f(\mathbf{e}_{n-1}) &= (0, 0, 0, \ldots, 1, -\rho) \\ f(\mathbf{e}_n) &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

De gezochte matrix $\mathbf{T}$ wordt dan gegeven door

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Spearman, de grondlegger van *factoranalyse* stelde een model op om de correlatie tussen scores van 33 kinderen voor 6 vakken te bestuderen, gegeven door:

	1	2	3	4	5	6
Klassieke talen	1					
Frans	.83	1				
Engels	.78	.67	1			
Wiskunde	.70	.67	.64	1		
Kritisch waarnemen	.66	.65	.54	.45	1	
Muziek	.63	.58	.51	.51	.40	1

In het model hangen de variabelen enerzijds af van gemeenschappelijke, niet-waarneembare factoren (zoals algemene intelligentie) en anderzijds van specifieke factoren (zoals aanleg voor het vak):

$$x_i = \lambda_{ij} f_j + e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ m < p.$$

De parameter λ_{ij} heet de lading van de $i$de variabele op de $j$de factor. In matrixgedaante luidt het model

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda f} + \mathbf{e}.$$

De factoren f_j en de specifieke factoren e_i voldoen aan een aantal basisonderstellingen, die we hier niet verder specifiëren. De variantie-covariantiematrix $\mathbf{\Sigma}$ van $\mathbf{x}$ is dan gelijk aan:

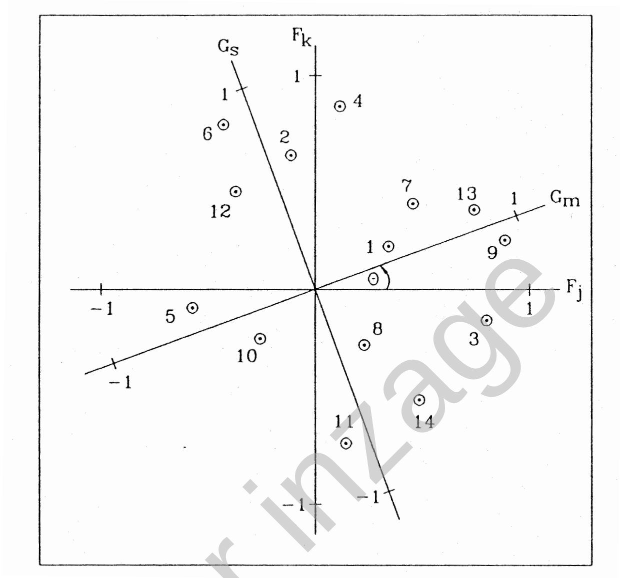
$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda\Lambda}^\top + \mathbf{\Psi},$$

met $\mathbf{\Psi}$ de variantie-covariantiematrix van $\mathbf{e}$. Om na te gaan dat deze ontbinding van de variantie-covariantiematrix behouden blijft als een schaalverandering wordt doorgevoerd, stellen we

$$\mathbf{X} = \mathbf{Cx} \qquad \text{met} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_p \end{pmatrix}.$$

Een schaalverandering is dus op te vatten als een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^p$ beschreven door de diagonaalmatrix $\mathbf{C}$.
Om binnen de verzameling van variabelen $x_1, x_2, \ldots, x_p$, groepen variabelen te kunnen onderscheiden die een hoge factorlading hebben op één bepaalde factor en lage factorlading op de overige factoren, gebruikt men een zogenaamde factorrotatie. Dit is een orthogonale transformatie die een rotatie van de factoren voorstelt, zie figuur 5.5. De nieuwe factoren $\mathbf{f}^*$ volgen uit de oude $\mathbf{f}$ via

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{G}^\top \mathbf{f} \qquad \text{met } \mathbf{G} \text{ een orthogonale matrix.}$$



Bron: J.D. Jobson, Applied Multivariate Data Analysis, Volume II: Categorical and Multivariate Methods, Springer-Verlag, New York, 1992.

Figuur 5.5: Factorrotatie.

Bibliografie

- Chiang A.C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3de editie, McGraw-Hill, 1984.
- De Schepper A., *Inleiding tot differentiaalvergelijkingen*, Garant, Leuven, 2001.
- Dhrymes P.J., *Mathematics for Econometrics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- Goult R.J., *Applied Linear Algebra*, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1978.
- Guerrien B., *Algèbre Linéaire pour Economistes*, 4de editie, Economica, Paris, 1997.
- Heal G., Hughes G. & Tarling R., *Linear Algebra and Linear Economics*, The MacMillian Press, Londen, 1974.
- Healy M.J.R., *Matrices for Statistics*, 2de editie, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- Klein M.W., *Mathematical Methods for Economics*, Addison Wesley, Readung, 1998.
- Ostaszewski A., *Mathematics in Economics. Models and Methods*, Blackwell Publishers, Oxford, 1993.
- Searle S.R. & Hausman W.H., *Matrix Algebra for Business and Economics*, John Wiley & Sons, 1970.
- Simon C.P. & Blume L., *Mathematics for Economists*, W.W. Norton & Company, New York, 1994.
- Sydsæter K., Strøm A. & Berck P., *Economists' Mathematical Manual*, Springer-Verlag, Berlijn, 1999.
- Verheyen P., *Wiskunde en Economie*, Garant, Leuven, 1999.
- Weber J.D., *Mathematical Analysis, Business and Economic Applications* , Harper and Row, New York, 1976.

Wiskunde IIB

Oefeningen en oplossingen

voor het tweede jaar Bachelor in
de Toegepaste Economische Wetenschappen: Handelsingenieur

2019 – 2020

UNIVERSITEIT GENT

Prof. dr. Michèle Vanmaele
Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek
Faculteit Wetenschappen
Krijgslaan 281 (S9), 9000 Gent
E-mail: michele.vanmaele@ugent.be

This page is intentionally left blank.

1. Aan welke differentiaalvergelijking voldoet $y(p)$?
2. Los de bekomen vergelijking op.
3. Is de oplossing stabiel?

Oefening 3.17:

Zoek alle vraagfuncties met

1. constante prijselasticiteit.
2. homogene lineaire prijselasticiteit.

Oefening 3.18:

Een griepepidemie breekt uit. Om de gevolgen voor de economie te kunnen inschatten wordt de procentuele aangroei van het aantal zieken gemodelleerd. Deze procentuele aangroei is recht evenredig met het procentuele aandeel niet-zieken, d.w.z:

$$\frac{z'}{z} = k\left(1 - \frac{z}{M}\right) \ ,$$

waarbij $z(t)$ het aantal zieken op tijdstip t, M de totale bevolking en k een willekeurige strikt positieve evenredigheidsfactor voorstelt.
Gevraagd:

1. Los deze differentiaalvergelijking op onder de voorwaarde $z(0) = \frac{M}{100}$.
2. Is de oplossing stabiel? Controleer het antwoord door het tekenen van het fasediagram.
3. Op welk tijdstip zal de helft van de bevolking ziek zijn?

This page is intentionally left blank.

5 Vectorruimtes

This page is intentionally left blank.

Oefening 5.33:

Deze combinatie-oefening steunt op de hoofdstukken 3 en 5.

a) Zij $\mathbf{A}$ een diagonaliseerbare $(n \times n)$-matrix, met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, allen verschillend van nul, en bijhorende eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Zij $\mathbf{B}$ een $(n \times 1)$-matrix. Beschouw volgend stelsel van n eerste orde differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}.$$

Druk de algemene oplossing van dit stelsel uit in functie van de eigenwaarden λ_i, de eigenvectoren $\mathbf{v}_i$ en de matrix $\mathbf{B}$.

b) Gebruik de formules die je vond in puntje a) om volgend stelsel beginwaardeproblemen op te lossen:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) + 3, & y_1(0) = -3, \\ y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t) + y_3(t) + 6, & y_2(0) = -2, \\ y_3'(t) = -3y_1(t) + y_2(t) - y_3(t) - 3, & y_3(0) = 8. \end{cases}$$

This page is intentionally left blank.

3 Dynamische analyse: Differentiaalvergelijkingen

Oefening 3.1:

1. niet-lineair, 2e orde
2. lineair, 2e orde, niet-gereduceerd
3. lineair, 4e orde, gereduceerd
4. lineair, 2e orde, niet-gereduceerd

Oefening 3.2:

1. Ja: Het linkerlid is

$$(xy')^2 = \left(x \frac{\cos(\ln|x| + \pi)}{|x|} \right)^2 = \cos^2(\ln|x| + \pi)$$

omdat $x^2 = |x|^2$ en het rechterlid is

$$1 - \sin^2(\ln|x| + \pi).$$

2. Ja, er geldt namelijk

$$y'(x) = -e^{(x-\pi/2)}(\sin(2x) + 2\cos(2x)), \qquad y''(x) = -e^{(x-\pi/2)}(-3\sin(2x) + 4\cos(2x)).$$

3. Ja, er geldt namelijk

$$x'(t) = \omega(-\sin(\omega t) + \cos(\omega t)), \qquad x''(t) = -\omega^2(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)).$$

Oefening 3.3:

1. Scheiding der veranderlijken, A.O.[1]: $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, S.O.[2]: $y = 0$, P.O.[3]: $c = 1$
2. Scheiding der veranderlijken. Na deling door $\sin^2 y \cos^2 x$, waarbij $\sin y \neq 0$ is ondersteld wegens het voorkomen van $\cot y$ in de opgave, bekomen we de vergelijking

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \frac{\cos y}{\sin^3 y} dy = 0 \ .$$

Na integratie verkrijgen we voor een willekeurige $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2\sin^2 y} = c \ .$$

Hieruit volgt dat de algemene oplossing impliciet beschreven wordt door

$$\sin^2 y - \cos^2 x = \tilde{c} \sin^2 y \cos^2 x \ ,$$

waarbij $\tilde{c}$ een willekeurige constante is. Voor de particuliere oplossing geldt dat $y(0) = \pi/2$. Het punt $(x, y) = (0, \pi/2)$ moet dus voldoen aan de vergelijking die de algemene oplossing beschrijft. Dit levert onmiddellijk $\tilde{c} = 0$.

[1] A.O. staat voor algemene oplossing

[2] S.O. is de afkorting voor singuliere oplossing

[3] P.O. staat voor particuliere oplossing

This page is intentionally left blank.

Het gezochte aantal zieken wordt gegeven door

$$z(t) = \frac{M}{1 + 99e^{-kt}}\,.$$

De vergelijking

$$w' + kw = \frac{k}{M}$$

kan ook opgelost worden door het zoeken van een integrerende factor μ zodat

$$(\mu w)' = \mu(w' + kw) = \mu\frac{k}{M}\,.$$

Uit $(\mu w)' = \mu' w + \mu w' = \mu w' + \mu k w$ volgt

$$\frac{\mu'}{\mu} = k \quad \Leftrightarrow \quad \ln|\mu| = kt \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{kt}\,.$$

Vervolgens halen we uit de gelijkheid $(e^{kt}w)' = e^{kt}\frac{k}{M}$ door integratie:

$$e^{kt}w = \frac{1}{M}e^{kt} + C \quad \Leftrightarrow \quad w(t) = \frac{1}{M} + Ce^{-kt}\,.$$

De rest van de oefening verloopt zoals het vervolg van de formule $(*)$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{M}{1 + MCe^{-kt}} = M$, derhalve is de oplossing stabiel.
In het fasediagram tekenen we de grafiek van

$$f(z) = k\left(1 - \frac{z}{M}\right)z\,.$$

De faselijn snijdt de **z**-as in punten waar

$$\begin{aligned} f(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = 0 \ \vee \ 1 - \frac{z}{M} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = 0 \ \vee \ z = M. \end{aligned}$$

Het tekenverloop van de kwadratische functie in z is

z		0		M	
$f(z)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Daaruit volgt dat $z(t)$ een stijgende functie is van t als $z \in]0, M[$ en een dalende functie van t als $z \in]M, +\infty[$. De pijlen op de faselijn die dit stijgen en dalen aangeven wijzen naar M. Dus M is een stabiel evenwicht. Op analoge manier kan men vaststellen dat de pijlen op de faselijn die het stijgen en dalen weergeven van z in de buurt van 0 niet naar 0 wijzen maar weg ervan. 0 is derhalve geen stabiel evenwicht.

3. Noem t_0 het tijdstip waarop de helft van de bevolking ziek is, dan geldt er

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} &= z(t_0) = \frac{M}{1 + 99e^{-kt_0}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2 = 1 + 99e^{-kt_0} \quad \Leftrightarrow \quad 99 = e^{kt_0} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln 99 = kt_0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\ln 99}{k}\,. \end{aligned}$$

This page is intentionally left blank.

Oefening 5.31:

1. $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \sim \mathbf{I}_3$.
2. We schrijven de canonische basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ in functie van de basis $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Zoals in Oefening 5.7 is
$$\mathbf{U} \cdot C_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, \qquad i \in \{1, 2, 3\},$$
waaruit volgt dat
$$C_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{U}}(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
of dus
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0) = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1) = -\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$
Aangezien f een lineaire transformatie is, volgt dat
$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2) - f(\mathbf{u}_3) = (5, 6, 6) \\ f(\mathbf{e}_2) &= f(-\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3) = -f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_3) = (0, 1, 0) \\ f(\mathbf{e}_3) &= f(-\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = -f(\mathbf{u}_2) + f(\mathbf{u}_3) = (-2, -3, -2). \end{aligned}$$
De matrix $\mathbf{A}$ is bijgevolg
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. De eigenwaarden en eigenvectoren van f zijn precies de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $\mathbf{A}$. De berekening van de eigenwaarden van deze matrix verloopt zoals in de vorige oefeningen. We vinden $\lambda = 1, 1, 2$.
De bijhorende eigenvectoren kunnen eveneens berekend worden zoals in de vorige oefeningen. We vinden dat de eigenruimte behorende bij de dubbele eigenwaarde $\lambda = 1$ opgespannen wordt door de eigenvectoren $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2)$ en $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, terwijl de eigenruimte behorende bij $\lambda = 2$ voortgebracht wordt door $\mathbf{v}_3 = (2, 3, 3)$.
4. Er geldt $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(\mathbf{A})$. Om de rang van $\mathbf{A}$ te bepalen zullen we deze matrix diagonalizeren. De vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ vormen een basis voor $\mathbb{R}^3$, waaruit onmiddellijk volgt dat de matrix $\mathbf{A}$ inderdaad diagonaliseerbaar is tot een matrix $\mathbf{D}$:
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Er geldt $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{D}) = 3$. Hieruit volgt dat $\mathrm{null}(f) = \mathrm{null}(\mathbf{A}) = 3 - \mathrm{rang}(\mathbf{A}) = 0$, zodat $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Dit kunnen we ook inzien uit het feit dat 0 geen eigenwaarde is van f. Aangezien $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ is ook $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$.